SUR L'EXISTENCE DES COURBES DE SIEGEL

MOHAMED HMISSI
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis
TN–1060 Belvédère, Tunis, Tunisia

MALTE SIEVEKING
Frankfurt, Germany

ABSTRACT

Let $\Psi : \mathbb{R}\times T^2 \mapsto T^2$ be a dynamical system without periodical trajectories, on the two-dimensional torus T^2. In this work we suppose that Ψ is (only) continuous and we prove that there exists on T^2 a simple closed curve which cuts every half-trajectory of the dynamical system (T^2, Ψ). This result is a generalization of a theorem of C.L. Siegel [7] who assumed that Ψ is defined by a vector field with continuous derivatives of the second order.

0. Introduction

Soit $\Psi : \mathbb{R} \times Y \mapsto Y$ un système dynamique sur un espace compact connexe Y. Une courbe Λ de Y est appelée courbe de Siegel du système (Y, Ψ) si Λ est fermée, simple et vérifie

$$\forall\, y \in Y,\ \exists\, t > 0\ :\ \Psi(t, y) \in \Lambda. \tag{1}$$

Une courbe de Siegel s'appelle ainsi car dans [7], C.L. Siegel a été le premier à démontrer son existence, toutefois sous les hypothèses que $Y = T^2$ est le tore de dimension deux et que Ψ est défini par un champ de vecteurs deux fois continûment différentiable et dans ce cas, Siegel obtient en fait une courbe différentiable. Mais depuis, il est connu ([1], [3]) que les courbes de Siegel continues (seulement) sont aussi importantes surtout dans la théorie ergodique.

AMS Classification (1991): 58F25.

Motivé par cette idée, nous nous proposons dans ce travail de démontrer le résultat de Siegel dans un cadre seulement continu. Les techniques sont naturellement différentes de celle [7], elles reposent plutôt sur les notions de morphisme et de parallélisation de systèmes dynamiques continus.

Le premier paragraphe est consacré à des généralités sur les systèmes dynamiques (SD) sur un espace X localement compact, connexe et à base dénombrable. En particulier, nous rappelons les propriétés essentielles des SD-morphismes et de la parallélisation. Un SD (X, Φ) est dit localement parallélisable, si X est réunion d'ouverts, invariants et parallélisables. Cette notion joue aussi un rôle important dans ce travail.

Dans le second paragraphe, nous démontrons le résultat technique suivant: Soient $p : (X, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ un SD-morphisme tel que $p : X \mapsto Y$ est un revêtement universel. Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $p(x_1) = p(x_2)$ et la trajectoire $C(x_1)$ est une séparatrice de (X, Φ), alors $C(x_2)$ est aussi une séparatrice de (X, Φ).

Le dernier paragraphe contient le résultat essentiel. Soit $p : (\mathbb{R}^2, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ un SD-morphisme tel que $p : \mathbb{R}^2 \mapsto Y$ est un revêtement universel, Y est un compact et (Y, Ψ) est sans trajectoires périodiques, alors $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ est localement parallélisable (d'après notre référence [6]). Dans ce cas, nous montrons alors qu'en fait $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ est parallélisable ce qui nous permettra de construire une courbe de Siegel associée au SD (Y, Ψ). Nous concluons par l'application de ce résultat sur le tore T^2.

1. Systèmes dynamiques

L'objet de ce paragraphe est un rappel des différentes notions utilisées dans toute la suite pour cela les références sont [1], [2] et [4]. Tous les espaces topologiques considérés sont localement compacts, connexes et à base dénombrable (noté LCD). Si X est un tel espace et si $U \subset X$ alors $\bar{U}$ (resp. U^*) dénote la fermeture (resp. la frontière) de U. La notation $|\cdot|$ désigne la norme naturelle de $\mathbb{R}$ et $\|\cdot\|$ dénote la norme sup de $\mathbb{R}^2$.

1.1. Systèmes dynamiques. Un *système dynamique* (noté SD) sur un espace LCD X est une application continue $\Phi : \mathbb{R} \times X \mapsto X$ telle que

$$\forall\, x \in X \ : \ \Phi(0, x) = x, \tag{2}$$

$$\forall\, x \in X\ ;\ s, t \in \mathbb{R} \ : \ \Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x)). \tag{3}$$

Un tel système est noté par le couple (X, Φ).

1.2. Séparatrices. Soit (X, Φ) un système dynamique.

1. Soit $x \in X$, la trajectoire *passante par* x et celle *partante de* x, sont définies respectivement par

$$C(x) := \{\Phi(t, x) \ : \ t \in \mathbb{R}\}\ ;\ C^+(x) := \{\Phi(t, x) \ : \ t \geq 0\}. \tag{4}$$

Une partie U de X est dite *invariante* si $C(x)$ est incluse dans U, pour tout $x \in U$. Lorsque U est invariant alors la restriction de Φ à $\mathbb{R} \times U$ définit un SD sur U, noté aussi par (U, Φ).

Une trajectoire $C(x)$ est dite *périodique* s'il existe $a \in]0, \infty[$ tel que $\Phi(a, x) = x$. Dans le cas où $C(x) = \{x\}$ alors x est appelé point *singulier*. Si le SD (X, Φ) ne possède pas de trajectoires périodiques, il est dit *régulier*.

2. Soient $x, y \in X$, la paire de trajectoires $(C(x), C(y))$ est appelée *selle* de (X, Φ), s'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, convergentes respectivement vers x et y et telles que $y \notin C^+(x)$ et $y_n \in C^+(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Chaque (trajectoire)-composante d'une selle de (X, Φ) est appelée *séparatrice* du SD (X, Φ).

1.3. Morphismes. 1. Soient (X, Φ) et (Y, Ψ) deux SD. Une application continue $p : X \mapsto Y$ est appelée *SD-morphisme de* (X, Φ) *vers* (Y, Ψ) si

$$\forall\, x \in X,\ t \in \mathbb{R}\ :\ p(\Phi(t, x)) = \Psi(t, p(x)). \tag{5}$$

2. Si de plus p est une bijection de X sur Y et p^{-1} est un SD-morphisme alors p est dite *SD-isomorphisme*. Dans ce cas (X, Φ) et (Y, Ψ) sont dits *SD-isomorphes*.

1.4. Parallélisation. 1. Un SD (X, Φ) est dit *parallèle* si $X := \mathbb{R} \times Z$ et

$$\forall\, z \in Z,\ s, t \in \mathbb{R}\ :\ \Phi(t, (s, z)) = (s + t, z). \tag{6}$$

Sur un espace de la forme $\mathbb{R} \times S$, le système dynamique dit *parallèle* (il est ici noté par $(\mathbb{R} \times S, \Theta)$) est défini par la relation (6), en remplaçant Z par S et Φ par Θ.

2. Un SD (X, Φ) est dit *parallélisable* si et seulement si, il est SD-isomorphe à un SD parallèle. Dans ce cas, nous disons aussi que X est parallélisable.

3. Un SD (X, Φ) est dit *localement parallélisable* si tout point de X, admet un voisinage U ouvert, invariant et tel que le SD (U, Φ) est parallélisable.

1.5. Remarques. 1. Il est connu ([2], Chap. IV et aussi [5]) qu'un SD est parallélisable si et seulement si, il est sans séparatrices.

2. En se référant à ([2], IV, 1.2 et 2.15), un SD est localement parallélisable si et seulement si il est complètement instable. En outre ce traité sur les systèmes dynamiques fournit suffisamment d'exemples de SD localement parallélisables.

2. Revêtement universel

L'objet de ce paragraphe est de démontrer un résultat, à caractère technique, utile pour la suite. Les notions suivantes sont empruntées à [4].

2.1. Définitions. Soient X et Y deux espaces LCD.

1. Une application $p : X \mapsto Y$ est appelée *revêtement* (*non ramifié et non borné*) *de* Y si chaque point $y \in Y$, possède un voisinage ouvert U tel que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j, \tag{7}$$

où les V_j $(j \in J)$ sont des ouverts de X, disjoints deux à deux et toutes les restrictions de p à V_j $(j \in J)$ sont des homéomorphismes.

2. Un revêtement $p : X \mapsto Y$ de Y est appelé *revêtement universel* de Y si:
Pour tout espace LCD Z, pour tout revêtement $q : Z \mapsto Y$ et pour tous $x \in X$, $z \in Z$ avec $p(x) = q(z)$, il existe une et une seule application $f : X \mapsto Z$, continue et vérifiant $f(x) = z$ et $q \circ f = p$.

3. Soit $p : X \mapsto Y$ un revêtement de Y. Un homéomorphisme $q : X \mapsto X$ est appelée *relèvement* de p si $p \circ q = p$.

2.2. Lemme. *Soit $p : X \mapsto Y$ un revêtement universel de Y. Alors pour tous points $x_1, x_2 \in X$ tels que $p(x_1) = p(x_2)$, il existe un relèvement q de p, tel que $q(x_1) = x_2$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Définition 2.1.2.

2.3. Proposition. *Soit $p : (X, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ un SD-morphisme tel que $p : X \mapsto Y$ est un homéomorphisme local. Si $q : X \mapsto X$ est un relèvement de p, alors*

$$q : (X, \Phi) \mapsto (X, \Phi) \quad \textit{est un SD-morphisme.} \tag{8}$$

Démonstration. Soient $x \in X$ et

$$I := I(x) := \{t \in \mathbb{R} : \; q(\Phi(t, x)) = \Phi(t, q(x))\}. \tag{9}$$

Il est alors clair que I est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $0 \in I$. Pour montrer (8), il suffit de vérifier que I est un ouvert de $\mathbb{R}$: Soient $t \in I$, $y := \Phi(t, x)$ et V un voisinage ouvert de $q(y)$ tels que:

$$\text{La restriction de } p \text{ sur } V \text{ est un homéomorphisme.} \tag{10}$$

Il existe alors $r \in]0, \infty[$ tel que

$$\forall\, |s| < r \;:\; q(\Phi(s, y)) \text{ et } \Phi(s, q(y)) \in V. \tag{11}$$

Montrons que:

$$\forall\, |s| < r \;:\; q(\Phi(s, y)) = \Phi(s, q(y)). \tag{12}$$

Pour cela, remarquons d'abord que, d'après (10) et (11), la relation (12) est équivalente à

$$\forall\, |s| < r \;:\; p \circ q(\Phi(s, y)) = p(\Phi(s, q(y))). \tag{13}$$

Puisque p est un SD-morphisme et $p \circ q = p$, alors (13) est vérifiée car pour tout $|s| < r$, nous avons

$$p \circ q(\Phi(s, y)) = p(\Phi(s, y)) = \Phi(s, p(y)) = \Phi(s, p \circ q(y)) = p(\Phi(s, q(y)).$$

Mais alors les relations (9) et (12) impliquent que I est un ouvert de $\mathbb{R}$ et donc que $I = \mathbb{R}$. Nous avons donc (8).

2.4. Théorème. *Soit $p : (X, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ un SD-morphisme tel que $p : X \mapsto Y$ est un revêtement universel de Y. En outre soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $p(x_1) = p(x_2)$ et $C(x_1)$ est une séparatrice de (X, Φ), alors $C(x_2)$ est aussi une séparatrice de (X, Φ).*

Démonstration. Soit $q : X \mapsto X$ le relèvement de p, défini par le Lemme 2.2. D'autre part soit $y_1 \in X$ tel que $(C(x_1), C(y_1))$ soit une selle: $y_1 \notin C^+(x_1)$ et il existe deux suites (x_1^n), (y_1^n) convergentes respectivement vers x_1, y_1 et telles que $y_1^n \in C^+(x_1^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $y_2 := q(y_1)$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; x_2^n := q(x_1^n)\;;\; y_2^n := q(y_1^n). \tag{14}$$

Il est d'abord clair d'après (14), que les suites (x_2^n), (y_2^n) sont respectivement convergentes vers x_2, y_2. Or d'après la Proposition 2.3, $q : (X, \Phi) \mapsto (X, \Phi)$ est un SD-morphisme, donc $y_2^n \in C^+(x_2^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais $y_2 \notin C^+(x_2)$ car q est aussi injective.

3. Théorème de Siegel

Ce dernier paragraphe contient l'essentiel de notre travail, c'est à dire la construction des courbes de Siegel pour des SD non nécessairement différentiables. Pour cela, nous rappelons d'abord les deux résultats suivants qui sont les Propositions 2.2 et 3.2 de notre référence [6].

3.1. Proposition. *Un SD sur $\mathbb{R}^2$ est régulier si et seulement si il est localement parallélisable.*

3.2. Proposition. *Soit $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ un SD localement parallélisable, alors tout point de $\mathbb{R}^2$, possède un voisinage O ouvert, connexe, invariant et tel que (O, Φ) soit parallélisable et O contient au plus une séparatrice de $(\mathbb{R}^2, \Phi)$.*

3.3. Proposition. *Soit $p : (\mathbb{R}^2, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ un SD-morphisme tel que Y est un compact, (Y, Ψ) est régulier et $p : \mathbb{R}^2 \mapsto Y$ est un revêtement universel de Y. Alors $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ est parallélisable.*

Démonstration. Par définition d'un SD-morphisme (relation (5)) et puisque (Y, Ψ) est régulier alors $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ est aussi régulier. Mais alors la Proposition 3.1 entraîne que

$(\mathbb{R}^2, \Phi)$ est localement parallélisable. Soit

$$M := \{\Phi(t, x) \ : \ t \in \mathbb{R},\ C(x) \text{ est une séparatrice}\}. \tag{15}$$

D'après (15) et 1.5.1, il suffit de montrer que $M = \emptyset$: En appliquant la définition d'un fermé, le Théorème 2.4 et la Proposition 3.2 entraînent que $p(M)$ est un fermé invariant de Y. Soient $y \in p(M)$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, tels qu'en posant

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \ z_n := \Psi(t_n, y), \tag{16}$$

nous avons $z := \lim_{n\to\infty} z_n \in M$. Toujours d'après 2.4 et 3.2, il existe

1. $x \in M$ (et $p(x) = z$),
2. un voisinage ouvert O de x, invariant, parallélisable et ne contenant aucune autre séparatrice de $(\mathbb{R}^2, \Phi)$,
3. une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de O, convergente vers x et vérifiant $z_n = p(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais alors (16) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la trajectoire $C(x_n)$ est une séparatrice. Donc nécessairement

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ : \ x_n \in C(x). \tag{17}$$

Puisque p est un SD-morphisme alors (17) entraîne que $D(y) := \{\Psi(t, y) : t \in \mathbb{R}\}$ est un fermé, donc compact de Y, c'est à dire que $D(y)$ est périodique ce qui contredit l'hypothèse que (Y, Ψ) est régulier.

3.4. Définition. Soient (Y, Ψ) un SD et Λ une courbe de Y. Λ est appelée *courbe de Siegel de* (Y, Ψ) si Λ est fermée, simple et vérifie

$$\forall\, y \in Y,\ \exists\, t > 0 \ : \ \Psi(t, y) \in \Lambda. \tag{1}$$

3.5. Proposition. *Soit* $p : (\mathbb{R}^2, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ *un SD-morphisme tel que* $p : \mathbb{R}^2 \mapsto Y$ *est un revêtement universel*, Y *est un compact connexe et* $(\mathbb{R}^2, \Phi)$ *est parallélisable. Alors le SD* (Y, Ψ) *admet une courbe de Siegel.*

Démonstration. Sans perdre de généralités, nous pouvons supposer, d'après la Définition 1.4.2, que

$$\forall\, a, b, t \in \mathbb{R} : \ \Phi(t, (a, b)) = (t + a, b). \tag{18}$$

Pour tout $r \in]0, \infty[$, soit $B_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| < r\}$. Puisque p est un homéomorphisme local alors $\{p(B_r) \ : \ r > 0\}$ est un recouvrement par des ouverts de Y. Comme Y est compact alors

$$\exists\, \eta \in]0, \infty[\ : \ p(B_\eta) = Y. \tag{19}$$

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x_2| > \eta$, alors il existe d'après (19), $x' \in B_\eta$ tel que $p(x) = p(x')$. Puisque p est un homéomorphisme local, nous pouvons choisir x' tel que la courbe fermée $\{p(sx + (1-s)x') : s \in [0, 1[\,\}$ est simple.

Fixons donc dans toute la suite, $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, telles que

$$u_2 > v_2\,;\;\; p(u) = p(v), \tag{20}$$

$$p \text{ est injective sur } I := \{su + (1-s)v : s \in [0, 1[\,\}. \tag{21}$$

Il est d'abord clair d'après (18), que $\Lambda := p(I)$ est une courbe de Y, fermée et simple. Il reste donc à montrer qu'elle vérifie la relation (1). Pour ce faire nous allons montrer que chaque composante connexe J de $p^{-1}(\Lambda)$, est le graphe d'une courbe

$$f := (f_1, f_2) \;:\; \mathbb{R} \;\mapsto\; \mathbb{R}^2,$$

telle que

$$f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ est strictement croissante,} \tag{22}$$

$$\lim_{t\to\infty} f_2(t) = \infty\,; \qquad \lim_{t\to-\infty} f_2(t) = -\infty, \tag{23}$$

$$\begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \setminus J = U_1 \cup U_2, \text{ tel que } U_1 \cap U_2 = \emptyset \text{ et pour } i = 1, 2,\, U_i \text{ est un} \\ \text{ouvert connexe et contient une composante connexe de } p^{-1}(\Lambda).\end{array} \tag{24}$$

En effet, l'application f cherchée, est définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall\, s \in [0, 1[\,:\;\; f(s) := su + (1-s)v. \tag{25}$$

Puisque p est un revêtement universel alors f vérifie ([4], 4.14) la Propriété du *lift*, c'est à dire que f se prolonge, d'une manière unique et continue, en une application (notée encore f) définie sur $[0, 2[$ et telle que

$$f(1) = u \text{ et } \forall\, s \in [0, 1[\,:\;\; p \circ f(1+s) = p \circ f(s). \tag{26}$$

En répétant ce procédé, nous obtenons alors $f := (f_1, f_2) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ continue, vérifiant (22) et telle que

$$\forall\, s \in [0, 1[,\;\; k \in \mathbb{Z} \;:\;\; p \circ f(k+s) = p \circ f(k-1+s). \tag{27}$$

En particulier, nous avons (23) aussi. Il reste donc à montrer (24): Soient J le graphe de f et B le disque unité. Pour tout $s \in \,]0, \infty[$, soit alors $J(s) := \{x + sz : x \in J, z \in B\}$. Comme pour démontrer (19), il existe $r \in \,]0, \infty[$ tel que $p(J(r)) = Y$. Soient maintenant $x \in J$ et $t > 0$ telles que $\Phi(t, x) \notin J(r)$, comme pour avoir (20), nous avons

$$\exists\, x' \in J,\;\; |t'| < r \;\;:\;\; p(\Phi(t, x)) = p(\Phi(t', x')). \tag{28}$$

Puisque $t > r$, nous avons $t - t' > 0$ et donc (28) entraîne que $\Phi(t - t', x) \in p^{-1}(\Lambda)$ et aussi $\Phi(t - t', x)$ appartient à une composante connexe de $p^{-1}(\Lambda)$, située à droite de la composante J. Enfin et en partant de $t < -r$, nous obtenons de la même manière une composante connexe de $p^{-1}(\Lambda)$, située à gauche de la composante J. Ceci démontre l'Assertion (24) et donc la Proposition.

3.6. Théorème. *Soit* $p : (\mathbb{R}^2, \Phi) \mapsto (Y, \Psi)$ *un SD-morphisme tel que* p *est un revêtement universel,* Y *est un compact connexe et* (Y, Ψ) *est régulier. Alors* (Y, Ψ) *admet une courbe de Siegel.*

Démonstration. Propositions 3.3 et 3.5.

3.7. Corollaire. *Soit* (T^2, Ψ) *un SD continu et régulier sur le tore* T^2, *alors* (T^2, Ψ) *admet une courbe de Siegel.*

Démonstration. Soit (T^2, Ψ) un SD continu et régulier et soit $p : \mathbb{R}^2 \mapsto T^2$, la projection canonique. Alors p est un revêtement universel de T^2 ([4], 5.11). De plus il existe ([1], p. 222) un unique SD $(\mathbb{R}^2, \Phi)$, tel que $p : (\mathbb{R}^2, \Phi) \mapsto (T^2, \Psi)$ soit un SD-morphisme. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 3.6.

References

[1] D.V. Anosov et V.I. Arnold, eds., *Dynamical Systems I*, Encyclopaedia Math. Sci. Vol. 1, Springer–Verlag, 1988.

[2] N.P. Bhatia et G.P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Grundl. Math. Wiss. 161, Springer–Verlag, 1970.

[3] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin et Y.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Grundl. Math. Wiss. 245, Springer–Verlag, 1982.

[4] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidel. Taschenbücher, Springer-Verlag, 1977.

[5] M. Hmissi, Semi-groupes déterministes, in: *Lect. Notes in Math. 1393*, Springer–Verlag, 1989, 135–144.

[6] M. Hmissi, Recouvrement parallélisable du plan, in: J.P. Lampreia et al., eds., *Proc. European Conference on Iteration Theory, Lisboa 1991,* World Scientific, 1992, 136–145.

[7] C.L. Siegel, Notes on differential equations on the torus, *Ann. Math* **46** (1945) (3), 423–428.